SIMON STEVIN

WIS- EN NATUURKUNDIG TIJDSCHRIFT

25E JAARGANG 1946/47

AFLEVERING III

UITGEVERS:
N.V. ERVEN P. NOORDHOFF — GRONINGEN-BATAVIA
DE NATUUR- EN GENEESKUNDIGE VENNOOTSCHAP, GENT
(Maatschappij zonder winstgevend doel)
Vertegenwoordiger in België: UITGEVERIJ DE SIKKEL, ANTWERPEN

OVER EEN BEWERING VAN EUCLIDES

door H. Freudenthal en B. L. v. d. Waerden [1])

Het dertiende boek der Elementen, dat over de vijf regelmatige veelvlakken handelt, eindigt met de bewering ,,dat behalve de genoemde vijf figuren geen andere figuur kan worden geconstrueerd, omvat door gelijkzijdige en gelijkhoekige onderling gelijke veelhoeken''.

Zoals DIJKSTERHUIS hierbij opmerkt (De Elementen van Euclides II, p. 267 noot) is deze bewering, naar de letter genomen, onjuist, omdat de voorwaarde, dat er in elk hoekpunt evenveel zijvlakken samenkomen, ontbreekt. Men kan b.v. een willekeurig aantal icosaëders op elkaar stapelen en op enkele zijvlakken nog octaëders of tetraëders zetten, enz. Het aantal mogelijkheden is blijkbaar oneindig.

Beperkt men zich echter tot convexe veelvlakken, dan wordt het aantal mogelijkheden eindig. De eenvoudigste voorbeelden zijn twee ,,diëders'', te weten een hexaëder en een dekaëder, die ontstaan door twee drie- of vijfzijdige pyramiden, waarvan alle ribben gelijk zijn, met de grondvlakken tegen elkaar te plaatsen (zie fig. 1—2).

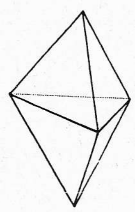

Fig. 1.

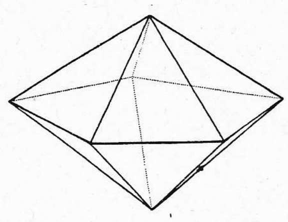

Fig. 2.

Wij willen hier *alle convexe lichamen, wier zijvlakken congruente regelmatige veelhoeken zijn,* bepalen.

Als de zijvlakken vier- of vijfhoeken zijn, kunnen er slechts 3 in één hoekpunt bij elkaar komen en men krijgt niets anders dan

[1]) Voor het tekenen van de figuren betuigen wij den heer A. G. TENNER onze dank.

de kubus en het regelmatige dodekaëder. Wij kunnen dus aannemen, dat de zijvlakken driehoeken zijn.

Een hoekpunt, waar 3, 4 of 5 driehoeken samenkomen, noemen we een driesprong, viersprong of vijfsprong. Laat a_3 het aantal driesprongen, a_4 het aantal viersprongen, a_5 het aantal vijfsprongen zijn. Het aantal ribben is dan

$$b = \frac{3a_3 + 4a_4 + 5a_5}{2} \tag{1}$$

en het aantal zijvlakken

$$c = \frac{3a_3 + 4a_4 + 5a_5}{3}. \tag{2}$$

De formule van EULER voor convexe lichamen

$$a_3 + a_4 + a_5 - b + c = 2 \tag{3}$$

leidt nu tot

$$\tfrac{3}{6}a_3 + \tfrac{2}{6}a_4 + \tfrac{1}{6}a_5 = 2$$

of

$$3a_3 + 2a_4 + a_5 = 12. \tag{4}$$

Het aantal gehele oplossingen van deze vergelijking is eindig. De oplossingen (4, 0, 0), (0, 6, 0) en (0, 0, 12) leiden tot bekende regelmatige veelvlakken. We zullen nu eerst de oplossingen met $a_3 > 0$ en dan die met $a_3 = 0$ bepalen.

De gevallen met $a_3 > 0$ zijn gemakkelijk te overzien. Als er nl. een driesprong bestaat, dan bepalen de 3 driehoeken, die in dat punt samenkomen, een tetraëder. Hakt men dit tetraëder af, dan blijft er een lichaam over, dat één hoekpunt en 3 zijvlakken minder heeft dan het gegeven lichaam. Zo kan men doorgaan, totdat er òf slechts één tetraëder overblijft, òf $a_3 = 0$ geworden is. We kunnen dus het lichaam opbouwen òf door uitsluitend tetraëders aan elkaar te zetten, òf door een lichaam zonder driesprongen te nemen en op enkele zijvlakken tetraëders te plaatsen. Maar als men meer dan 2 tetraëders aan elkaar zet, blijft het lichaam niet convex, en als men aan een der zijvlakken van een vier- of vijfsprong een tetraëder zet, dan blijft het lichaam ook niet convex, behalve in 't geval van het octaëder, waar men een tetraëder aanzet; maar in dat laatste geval liggen de vlakken juist in elkaars verlengde en de zijvlakken worden ruiten. Dus vinden we hier als enig convex lichaam het hexaëder van fig. 1.

Voor $a_3 = 0$ hebben we behalve het regelmatige octaëder en cosaëder de volgende oplossingen van (4):

Nummer	a_3	a_4	a_5	Aantal zijvlakken
1)	0	1	10	18
2)	0	2	8	16
3)	0	3	6	14
4)	0	4	4	12
5)	0	5	2	10

Geval 1) is onmogelijk. Want als we met de ene viersprong A beginnen en er een krans van vijfsprongen $BCDE$ omheen leggen, komen we (in centrale projectie) tot figuur 3:

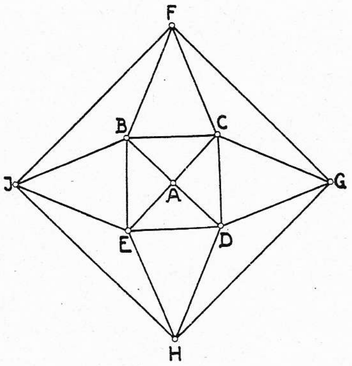

Fig. 3.

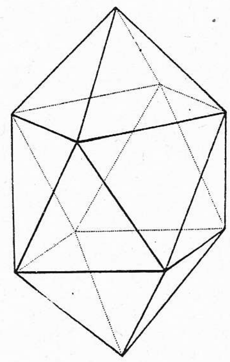

Fig. 4.

Men mag nu niet I met G of F met H identifieren, want dan zou men een zessprong krijgen. We moeten dus verder gaan en van elk van de buitenste punten $FGHI$ een vijfsprong maken. Dit kan alleen door aan elk van de buitenste ribben een driehoek aan te leggen en deze driehoeken naar elkaar toe te buigen, totdat ze twee aan twee een opstaande zijde gemeen hebben en hun toppen dus in één punt K bijeen komen. Maar dan wordt K een viersprong, dus hebben we niet geval 1), maar geval 2). Het 18-vlak (geval 1) is dus onmogelijk.

Door deze beschouwing hebben we tevens het enige mogelijke 16-vlak (geval 2) gevonden. Men kan het als volgt construeren. Twee gelijke vierkanten in evenwijdige vlakken, 45° ten opzichte van elkaar gedraaid, worden op een zodanige afstand van elkaar gebracht, dat de verbindingslijnen van naburige hoekpunten gelijk worden aan de zijden van de vierkanten (fig. 4). Dan wordt op elk der vierkanten nog een pyramide geplaatst, welks opstaande ribben gelijk zijn aan de overige ribben.

Er is nog een andere wijze, fig. 3 tot een veelvlak te voltooien, nl. door de ruimtelijke vierhoek $FGHI$ met twee driehoeken, bv

FGI en HGI af te sluiten. Men krijgt zo het volgende lichaam. Men neemt een driezijdig prisma, welks opstaande zijvlakken vierkanten zijn. Op elk van deze vierkanten zet men een pyramide met gelijke ribben (fig. 5). Zo verkrijgt men een convex veertienvlak.

Hiermede zijn alle mogelijkheden, waartoe fig. 3 aanleiding geeft, opgesomd. Dit wil zeggen, we hebben nu alle gevallen gehad, waarin een viersprong uitsluitend vijfsprongen tot naaste buren heeft. We hoeven dus nu alleen nog maar die gevallen te behandelen, waarin twee viersprongen B en C aan elkaar grenzen. We hebben dan om B de 4 punten $AECF$, om C de 4 punten $BEDF$ (zie fig. 6). De punten $ABCD$ liggen allen even ver van E, dus op een bol om E, maar ook op een bol om F, dus op de snijcirkel van deze beide bollen. De figuur $ABCD$ is dus een gelijkbenig trapezium in het vlak van deze cirkel (fig. 7); de punten

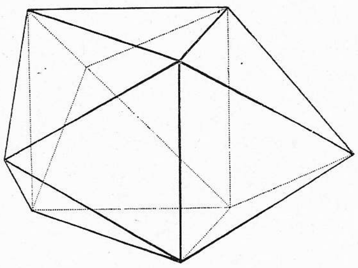

Fig. 5.

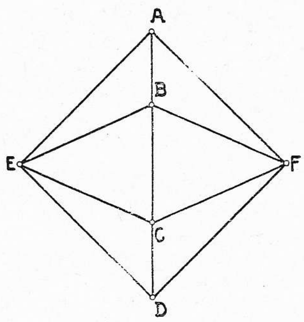

Fig. 6.

E en F liggen loodrecht boven en beneden het middelpunt M van deze cirkel (fig. 8).

Stel nu eerst, dat A weer een viersprong is. Dan vinden we in het vlak van deze cirkel op dezelfde wijze nog een vijfde punt, dat ook met D identiek kan zijn, dus hebben we in de cirkel een vierhoek of vijfhoek beschreven. Van E en F gaan 4 of 5 driehoeken uit naar de zijden van deze vijfhoek, en we hebben dus òf een octaëder òf het dekaëder van fig. 2.

Hetzelfde geldt natuurlijk, als D een viersprong is. Laten we dus nu aannemen, dat A en D beide vijfsprongen zijn.

Stel nu, dat E een viersprong is. Dan moeten we de driehoek EAD erbij nemen, om de krans van driehoeken om E te completeren. De driehoek ADF is nu ook gelijkzijdig, maar behoort niet tot de zijvlakken van het lichaam. We hebben nu een octaëder, waar één driehoek ADF aan ontbreekt. Aan elke zijde van deze driehoek moeten we nu nog één driehoek zetten, om de kransen der vijfsprongen ADF vol te maken, en deze 3 driehoeken mleten we aan elkaar laten sluiten, zodat hun toppen samenvallen. Deze top wordt dus een driesprong en het lichaam wordt een octaëder + tetraëder. Dit geval hebben we al behandeld.

We moeten dus aannemen, dat E en F eveneens vijfsprongen worden. Van elk van hen gaat dus een vijfde lijn uit. Laat deze lijnen in G en H eindigen (fig. 9). Dan moeten we dus aan EA en ED de driehoeken EAG en EDG aanzetten, en net zo aan FA en

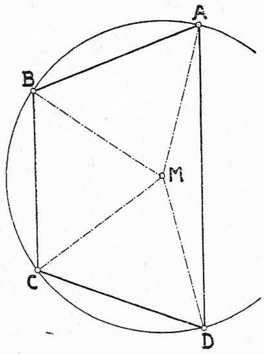

Fig. 7.

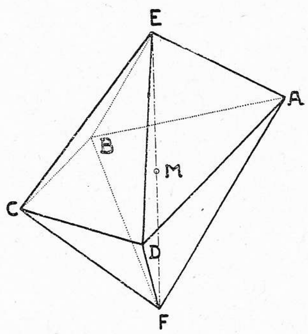

Fig. 8.

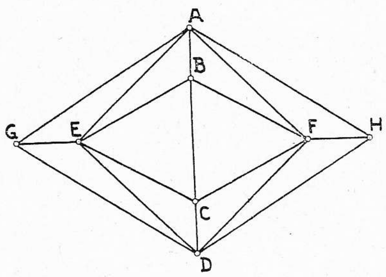

Fig. 9.

FD de driehoeken FAH en FDH. G en H vallen niet samen, anders zou A een viersprong worden. De krans om A wordt nu gecompleteerd met de driehoek AGH, en die om D met de driehoek DGH. De aangrenzende hoekpunten G en H worden dus viersprongen. De aan G en H grenzende driehoeken vormen dus net weer zo'n dubbel tentje als in fig. 8 afgebeeld. De twee dubbele tentjes grenzen langs de ruimtelijke vierhoek $AEDF$ aan elkaar en vormen samen een twaalfvlak, dat wij „Siamees dodekaëder" willen noemen, omdat de twee dubbele tentjes als een Siamees tweelingspaar met elkaar vergroeid zijn.

De constructie van het Siamese dodekaëder is als volgt: Kies de verhouding van de zijde a van het trapezium (fig. 7) tot de straal r van de omgeschreven cirkel zodanig, dat de vierde zijde AD gelijk wordt aan de dubbele hoogte h van een tentje. Hoe dit mogelijk is, zullen wij straks onderzoeken. Dan zijn dus de diagonalen van de ruimtelijke vierhoek $AEDF$ (fig. 8) even lang. Verbindt men nu de middens van DE en AF, dan zal deze vierhoek door een draaiing om deze as in zichzelf overgaan. Het dubbele tentje gaat door deze omdraaiing in een dergelijk dubbel tentje

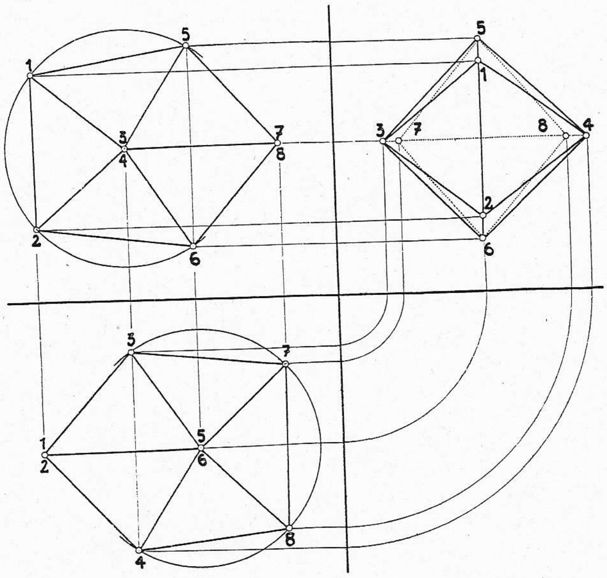

Fig. 10.

over, dat samen met het eerste een convex twaalfvlak op levert.

Om nu de verhouding $a : r$ te bepalen, stellen we $r = 1$ en $AMB = 2\varphi$ (fig. 7) en hebben dan

$$\begin{aligned} a &= AB = 2 \sin \varphi \\ AD &= 2 \sin 3\varphi \\ h^2 &= a^2 - r^2 = 4 \sin^2\varphi - 1, \end{aligned}$$

zodat we de voorwaarde

$$4 \sin^2\varphi - 1 = \sin^2 3\varphi$$

vinden. Stellen we nu $\cos 2\varphi = x$, dan wordt $\cos 6\varphi = 4x^3 - 3x$, dus vinden we

$$\begin{aligned} 4(1 - x) - 2 &= 1 - 4x^3 + 3x, \\ 4x^3 - 7x + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Deze vergelijking is irreducibel en heeft 3 reële wortels, waarvan er één tussen — 1 en + 1 ligt, nl.

$$x = \cos^2\varphi = 0{,}1445\ldots$$
$$2\varphi = 80^\circ\, 41'\ldots$$

Tekent men met deze waarde van φ het lichaam in orthogonale projectie, dan blijkt het convex te zijn. (Fig. 10).

Hieronder nog een tekening in scheve projectie.

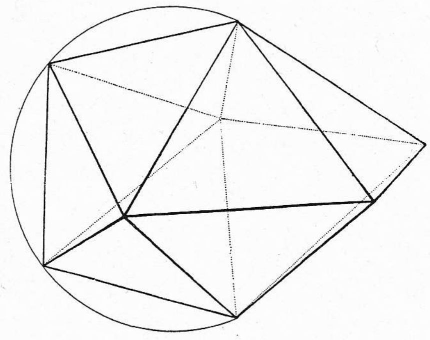

Fig. 11.

Volgens een stelling van Cauchy zijn alle convexe polyeders star, d.w.z. als de zijvlakken van twee polyeders congruent zijn en op dezelfde manier aan elkaar passen, zijn de polyeders zelf congruent. De vijf lichamen zijn dus evenals de regelmatige lichamen in hun vorm eenduidig bepaald.

Er zijn dus behalve de 5 regelmatige veelvlakken nog 5 convexe lichamen, die aan de voorwaarde van Euclides voldoen, nl. een 6- vlak, een 10-vlak, een Siamees 12-vlak, een 14-vlak en een 16-vlak.